

MIRCEA POPESCU

MATEMATICĂ

– OLIMPIADE ȘI CONCURSURI ȘCOLARE –

CLASA A VI-A

Editura SITECH

Craiova, 2021

1. SUBMULTIMI. CARDINALUL UNEI MULȚIMI . OPERAȚII CU MULȚIMI .MULȚIMI FINITE ȘI INFINITE.

1.1 Fie $a = (3^{21})^3 : 9^{30} - (2^{15})^8 : 8^{39}$. Determinați numărul de elemente al mulțimii :

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < a\}.$$

(Olimpiada locală, Dâmbovița, 2001)

1.2 Determinați mulțimile A și B care verifică simultan relațiile : $A \cap B = \{1, 2\}$; $A - B = \{3, 4\}$ și suma elementelor celor doua mulțimi este egală cu 25.

(Olimpiada locală, Tulcea, 2001)

1.3 a) Determinați mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2x < 13 \text{ și } x \mid 16\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1+2x < 10 \text{ și } 2 \mid x\}$.

b) Calculați $A \cap B$ și $A - B$.

(Olimpiada locală, Alba, 2003)

1.4 Să se determine mulțimile A și B dacă îndeplinesc simultan condițiile : $A \cap B = \{1, 3, 9\}$; $A - B = \{2, 4, 11\}$; $B - A = \{5, 7, 8\}$.

(Olimpiada locală, Arad, 2003)

1.5 Să se determine mulțimiile X și Y care verifică condițiile :

a) $X \cup Y = \{2, 4, 6, 8, 10\}$; **b)** $X \cap Y = \{4, 8\}$; **c)** Suma elementelor lui X este mai mare ca 14.

(Olimpiada locală, Ilfov, 2002)

1.6 Determinați mulțimea : $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \cdot 3^n \leq x < 3^{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$, știind că are trei elemente .

(Olimpiada județeană, Buzău, 2007)

1.7 Comparați numerele $a = \text{card } A$ și $b = \text{card } B$, unde $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^{2007} < x \leq 2^{2008}\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N} \mid 1 \leq y \leq 3^{1338}\}$.

(Olimpiada locală, Mehedinți, 2008)

1.8 Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = a + a^2, a \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y = 2b + 1, b \in \mathbb{N}\}$

a) Scrieți cinci elemente ale mulțimii A și cinci elemente ale mulțimii B.

b) Arătați că mulțimile A și B sunt disjuncte.

(Olimpiada locală, Vaslui, 2008)

1.9 Se consideră mulțimile : $A_1 = \{2\}$, $A_2 = \{2,4\}$, $A_3 = \{2,4,6\}$, ..., $A_n = \{2,4,6,...,2n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

- a) Determinați A_7 .
- b) Demonstrați că pentru nici o mulțime suma elementelor nu poate fi pătrat perfect.
- c) Aflați $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care suma elementelor mulțimii A_n este 2550.

(Olimpiada județeană, Maramureș, 2010)

1.10 Să se determine mulțimea : $A = \{ \overline{abc} \mid 11a - 2b - 4c = 0 \}$.

(Olimpiada locală, Prahova, 2012, Roxana Soare)

1.11 Fie $A \subset \mathbb{N}$, astfel încât a) $2 \in A$ și $5 \in A$; b) Dacă $x \in A$, atunci $3x+2 \in A$; c) Dacă $7x - 4 \in A$, atunci $x \in A$.

Arătați că $\{3,8,12,17\} \subset A$.

(Olimpiada locală, Alba, 2013)

1.12 Se consideră mulțimile : $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2,3\}$, $A_3 = \{4,5,6\}$, ...

- a) Determinați cel mai mic element al mulțimii A_5 .
- b) Determinați cel mai mare element al mulțimii A_{100}
- c) Determinați mulțimea care conține numărul 2013.

(Olimpiada locală, Brașov, 2013)

1.13 Fie mulțimea $A = \{3,7,11,15,...\}$ și $\text{card } A = 100$.

- a) Sunt numerele 123, 321, 399 și 435 elemente ale mulțimii A ?
- b) Aflați cel mai mare element al mulțimii și suma elementelor din A .

(Olimpiada locală, Buzau, 2013)

1.14 Se dau mulțimile $A = \{2^3, p-1, 1^{75}, p+1\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 5 \text{ și } x \text{ par}\}$, unde $p \in \mathbb{N}^*$.

Determinați valoarea lui p astfel încât să fie îndeplinită condiția : $A \cap B = \{4\}$.

(Olimpiada locală, Covasna, 2013)

1.15 Se dau mulțimile $A = \{12, 2n+1\}$ și $B = \{n^2+n, 2n-1\}$. Determinați valoarea lui $n \in \mathbb{N}$, dacă $A \cup B$ are trei elemente.

(Olimpiada locală, Harghita, 2013)

1.16 Se dă mulțimea $A = \{2000, 2001, 2002, \dots, 3000\}$.

a) Câte pătrate perfecte conține mulțimea A ?

b) Dacă toate elementele lui A se împart la 11, calculați suma resturilor obținute.

(Olimpiada locală, Teleorman, 2013)

1.17 Determinați mulțimile A și B , știind că sunt îndeplinite simultan condițiile :

i) $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$; **ii)** $A - B = \{a, b\}$; **iii)** $\text{card}(A \cap B) < \text{card}(B - A)$.

(Olimpiada locală, Vaslui, 2013)

1.18 Determinați numerele naturale x astfel încât mulțimile : $A = \{2X, 6X+4\}$ și $B = \{2x-1, 2x+1, 5x+6\}$ să aibă un singur element comun.

(Olimpiada locală, Alba, 2014)

1.19 Determinați mulțimile A și B știind că îndeplinesc simultan condițiile :

a) $A - B = \{0, 7\}$; **b)** $B - A = \{3, 9\}$; **c)** $|A - B| = 3$; **d)** suma elementelor multimii $A \cup B$ este 29.

(Olimpiada locală, Covasna, 2014)

1.20 Fie mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} | 2^n < x \leq 2^{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$.

a) Câte elemente are mulțimea A în cazul $n = 2014$?

b) Determinați numărul n pentru care mulțimea A are 128 de elemente.

(Olimpiada locală, Ilfov, 2014)

1.21 Se consideră mulțimea $A = \{x^3 + y^3 \mid x, y \in \mathbb{N}^*, x \neq y\}$

a) Verificați că $28^{28} \in A$ și $1792^{1792} \in A$

b) Demonstrați că A conține o infinitate de elemente de forma n^n , cu n număr natural.

(Olimpiada locală, Argeș, 2015, G.M.1/2012)

1.22 Fie A o mulțime de numere naturale cu următoarele proprietăți :

i) dacă $x \in A$, atunci $4x + 1 \in A$; **ii)** dacă $2y + 1 \in A$, atunci $3y + 2 \in A$; **iii)** $5 \in A$.

Arătați că numerele 8 și 50 se găsesc în A .

(Olimpiada locală, Gorj, 2016 , G.m.4 /2015)

1.23 Fie $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3^x \mid 72\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 34x : 18, x < 10\}$. Calculați $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$.

(Concursul "Nicolică Sanda", Drăgășani, 2000)

1.24 Se consideră mulțimile A și B știind că : a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; b) $A \cap B = \{1, 2\}$; c) $5 \notin A \setminus B$; d) mulțimea A are mai multe elemente decât mulțimea B .

(Concursul interjudețean de matematică "Mihai Viteazul", Sfântu Gheorghe, 9 dec. 1998)

1.25 Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2000, 2x > 2001\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ împărțit la } 16 \text{ dă restul } 4 \text{ și } x \text{ împărțit la } 20 \text{ dă restul } 5\}$.

a) Scrieți mulțimea A ca intersecție de două mulțimi.

b) Determinați cardinalul mulțimilor A și B

(Concursul "Dan Barbilian", Câmpulung, 1999, Dan Codeci)

1.26 Să se afle toate numerele naturale n pentru care mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid n < x < 2n, x \text{ par}\}$ are 5 elemente.

(Concursul "Traian Lalescu", Deva, 7-9 apr. 2000, Maria Miheț)

1.27 Să se determine mulțimile A și B știind că $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $A \cap \{6, 7\} = \emptyset$.

(Concursul "Traian Lalescu", ediția a XV-a, Arad, 24-25 martie. 2001)

1.28 Se consideră mulțimea : $\{1, 2, 3, \dots, 2001, 2002\}$.

a) Să se arate că putem distribui elementele 1, 2, 3, ..., 2001, 2002 în submulțimi cu două elemente care au aceeași sumă a elementelor.

b) Să se arate că nu putem distribui elementele 1, 2, 3, ..., 2001, 2002 în două submulțimi A și B disjuncte și care să aibă suma elementelor mulțimii A egală cu suma elementelor mulțimii B .

(Concursul interjudețean "Marian Țarina", Turda, 17-19 mai 2002, Vasile Șerdan)

1.29 Se dau mulțimile $A = \{5n + 1992, 5n + 1993, 5n + 1998 \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Să se determine $A \cap B$.

(Concursul interjudețean Memorialul "Ștefan Dârțu", ediția a IV-a, Vatra Dornei, 14 dec. 2002, e.p.)

1.30 Se dau mulțimile : $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 4^{28} < x \leq 16^{15}\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^{5^2} < x \leq 8^{19}\}$. Arătați că numărul de elemente al mulțimii $A \cap B$ este mai mare decât 64000.

(Concursul interjudețean de matematică "Jose Marti", București, 25 ian. 2003)

1.31 Fie mulțimile $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 3^{n^2} + 9^{2n} = 25^n\}$, $B = \{2^m + 3^m \mid m \in \mathbb{N}, m = 3\}$, $C = \{\overline{11}_{(2)}, \overline{101}_{(2)}, \overline{1101}_{(2)}\}$, unde $\overline{ab}_{(2)}$ reprezintă numărul $\overline{ab}$ scris în baza 2.

a) Determinați mulțimile $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $B \setminus C$, $A \setminus C$, $C \setminus B$.

b) Determinați mulțimile $B + C = \{x + y \in \mathbb{N} \mid x \in B, y \in C\}$, $B - C = \{x - y \in \mathbb{N} \mid x \in B, y \in C\}$,

(Concursul "Traian Lalescu", ediția a XII-a, Caransebeș, 29 martie. 2003)

1.32 Se consideră mulțimea $A = \{1, 3, 5, 7, \dots, 2001\}$.

a) Să se afle numărul elementelor mulțimii A .

b) Să se afle suma elementelor mulțimii A .

(Concursul anual al rezolvitorilor R.M.T., Constanța, 11 mai 2003, Lupu Cezar)

1.33 Fie $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^{2005} < x \leq 2^{2007}\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N} \mid 3^{2003} \leq y < 3^{2005}\}$.

a) Specificați cel mai mic element al mulțimii A și cel mai mare element al mulțimii B .

b) Stabiliți care mulțime are mai multe elemente.

(Concursul "Cezar Ivănescu", Târgoviște, 26 feb. 2005)

1.34 Se dau mulțimile $A = \{0, 4, 7, x\}$ și $B = \{1, 5, x\}$. Găsiți $x \in \mathbb{N}$ astfel ca mulțimea $C = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ să aibă un număr minim de elemente.

(Concursul "Florica T. Câmpian", etapa interjudețeană, Iași, 9 apr. 2005)

1.35 Calculați suma elementelor mulțimii $\{\overline{ab} \mid \overline{ab} + \overline{ba} = 110\}$.

(Concursul "Alexandru Myller", Iași, 19 martie 2005)

1.36 Se consideră mulțimea $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 2006\}$.

a) Stabiliți dacă se poate scrie mulțimea M ca reuniune de mulțimi disjuncte M_k , astfel încât în fiecare mulțime M_k , să existe un element egal cu suma celorlalte.

b) Să se demonstreze că din oricare 1005 elemente din M se pot alege două elemente diferite astfel încât suma lor să fie 2006.

(Concursul "Petre Sergescu", Drobeta Turnu-Severin, 20 ian. 2006)

1.37 a) Determinați mulțimea $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \overline{abab} + 100b = n^2\}$.

b) Calculați suma numerelor naturale impare mai mari decât cel mai mic element al mulțimii A și mai mici decât cel mai mare element al lui A .

(Concursul "Sorin Simion", Pitești, 8 aprilie 2006, Ioan Chera)

1.38 Se consideră mulțimile $A = \{2^{n+4} \cdot 3^n + 1 \mid n \in \mathbf{N}\}$ și $B = \{2^{n+1} \cdot 5^{n+2} + 3 \mid n \in \mathbf{N}\}$. Să se arate că : **a)** $A \cap B = \emptyset$; **b)** $A \cup B$ nu conține nici un pătrat perfect.

(Concursul "Traian Lalescu", Iași, 29 apr. 2006, Silviu Birăuș)

1.39 Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 21\}$.

a) Să se afle suma elementelor mulțimii A .

b) Putem scrie mulțimea A ca reuniune de submulțimi disjuncte astfel încât cel mai mare număr din fiecare submulțime să fie egal cu suma celorlalte numere din acea submulțime?

(Concursul revistei Arhimede, etapa finală, București, 12 mai 2007, Liviu Opreșescu)

1.40 Se dă mulțimea $A = \{3, 3^2, 3^3, \dots, 3^{2007}\}$. Notăm S suma elementelor mulțimii A .

a) Aflați suma tuturor resturilor ce se obțin împărțind fiecare element din A la 4.

b) Aflați restul împărțirii numărului S la 4.

(Concursul "Mathematica modus-vivendi", Rm. Vâlcea, 24-25 feb. 2007, Avram Roseti)

1.41 Dacă $A = \{a, b, c\}$, unde a, b, c sunt numere naturale a căror sumă este 228 și dacă împărțim primul număr la al doilea și apoi al treilea la primul, obținem de fiecare data câtul 4 și restul 3 și $B = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 5k + 3, k \in \mathbf{N}, k \leq 8\}$.

a) Arătați că A și B nu sunt disjuncte.

b) Determinați $k \in \mathbf{N}$ astfel încât $A \cap B = \emptyset$.

(Concursul "Vertical", Tg. Jiu, 20 ian. 2007)

1.42 Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 2^{2008} < x \leq 2^{2009}\}$ și $B = \{y \in \mathbf{N} \mid 3^{1338} \leq y < 3^{1339}\}$. Care din mulțimile A și B are mai multe elemente? Justificați răspunsul.

(Concursul "Jose Marti", București, 12 ian. 2008)

1.43 a) Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 3 < 2x + 1 < 13\}$, $B = \{y \mid y = x^2 - 5x + 6, x \in A\}$, $C = \{z \mid z = 3y, y \in B\}$, $D = \{t \mid t = x + y, x \in A, y \in B\}$. Calculați $A \cap B$, $B \cup C$, $(C \cap D) \setminus (B \cap C)$.

b) Demonstrați că există $n \in \mathbf{N}$ astfel încât $4^5 + 2^{11} + 2^n$ să fie pătrat perfect.

(Concursul "Viitorii Matematicieni", Alba Iulia, 12 ian. 2008, Rodica Marinescu)

1.44 Fie mulțimea $A = \{8, 9, 10, \dots, 2000\}$ și B o submulțime a lui A formată din 998 de elemente distincte două câte două.

a) Calculați suma elementelor mulțimii A .

b) Arătați că există în B cel puțin două elemente a căror sumă este egală cu 2008.

(Concursul "La școala cu ceas", Rm. Vâlcea, 14 mar. 2008, Gheorghe Ciucă, Florin Smeureanu)

1.45 Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 2007, 2008\}$.

- a) Scrieți mulțimea A folosind o proprietate caracteristică a elementelor sale.
- b) Aflați suma elementelor mulțimii A .
- c) Arătați că suma elementelor impare ale mulțimii A este pătrat perfect.
- d) Determinați numărul tuturor submulțimilor mulțimii A .
- e) Să se arate că oricum am alege 1005 elemente din A , produsul lor este număr par.

(Concursul "Marian Țarină", Turda, 17 mai 2008, Vasile Șerdan, Grigore Tarța)

1.46 Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 2008\}$.

- a) Care este diferența dintre numărul de submulțimi cu două elemente ale mulțimii A și numărul de submulțimi cu două elemente ale mulțimii A care nu-l conțin pe 1000?
- b) Dacă m este numărul de submulțimi cu 8 elemente ale mulțimii A și n numărul de submulțimi cu 2000 de elemente ale aceleiași mulțimi. Comparați m cu n .

(Concursul centrelor de excelență din Moldova, Suceava, 31 mai 2008, Ecaterina Hulață)

1.47 Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = a^2 + a, a \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y = 2b + 1, b \in \mathbb{N}\}$

- a) Scrieți cinci elemente ale mulțimii A și cinci ale lui B .
- b) Arătați că A și B sunt disjuncte.

(Concursul "Papiu-Ilarian", Tg. Mureș, 8 nov. 2008)

1.48 Determinați elementele mulțimilor A și B care satisfac simultan condițiile:

- i) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; ii) $A \cap B = \{1, 2\}$
- iii) $A \setminus B$ are un singur element; iv) Suma elementelor lui B este un număr par.

(Concursul "Simion Petru", Tg. Mureș, 17 ian 2009)

1.49 Date mulțimile $A = \{a^{b^c} \mid a, b, c \in \{1, 2, 3\}\}$ și $B = \{(a^b)^c \mid a, b, c \in \{1, 2, 3\}\}$, calculați $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

(Concursul "Jose Marti", București, 24 ian. 2009, Gabriel Vrînceanu)

1.50 Fie mulțimea $A = \{\overline{abc} \mid a^b = c\}$.

- a) Determinați numărul de elemente ale mulțimii A ; b) Aflați $A \cap \{\overline{abc} \mid b^a = c\}$;
- c) Determinați elementele mulțimii A care verifică relația $\overline{abc} = \overline{ac}^b$.

(Concursul "Mathemetica modus-vivendi", Rm. Vâlcea, 21 feb. 2009, Avram Roseti)

1.51 Se dă mulțimea $A = \{9, 14, 19, 24, \dots, 10044, 10049\}$.

a) Să se determine cardinalul mulțimii A .

b) Dacă B este o submulțime a lui A astfel încât $\text{card}(B) = 1006$, să se arate că în B există două numere a căror sumă este 10063.

(Concursul "Eugen Ionescu", Slatina, 21 martie 2009, Ion Neață)

1.52 Mulțimea numerelor naturale se împarte în submulțimi : $\{0\}, \{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{6, 7, 8, 9\}, \dots$.

Determinați : a) cu ce număr începe cea de-a 50-a submulțime; b) suma elementelor celei de-a 50-a submulțime; c) suma elementelor primelor 50 de submulțimi.

(Concursul "Grigore Moisil", Satu Mare, 4 aprilie 2009, Nicolae Baciuc)

1.53 Se consideră mulțimea $A = \{1, 3, 5, 7, \dots, 101\}$.

a) Determinați numărul perechilor (a, b) cu $a, b \in A, a < b$, pentru care $a+b = 100$.

b) Arătați că, dacă suma a 46 de elemente ale mulțimii A este 2010, atunci cel puțin două dintre acestea sunt egale.

(Concursul RMCS, Oțelul Roșu, 7 martie 2010)

1.54 Se consideră mulțimea $A \subset \mathbf{N}$, cu următoarele proprietăți:

i) $11 \in A$; ii) Dacă $x \in A$, atunci $\{3x, 6x + 4\} \subset A$; iii) Dacă $4x + 2 \in A$, atunci $x \in A$.

Arătați că $2010 \in A$.

(Concursul "Ion Ciolac", Craiova, 8 mai 2010, Monica Stanca)

1.55 Se consideră mulțimea $M = \{x^4 \mid x \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}\}$. Determinați numărul minim de elemente care trebuie alese arbitrar din mulțimea M , pentru a fi siguri că există două elemente alese având diferența divizibilă cu 10.

(Concursul "Speranțe", Comănești, 30 aprilie 2011, G.m.2011)

1.56 Fie mulțimea $A = \{1, 3, 5, \dots, 2n + 1, \dots\}$. Construim $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{3, 5\}$, $A_3 = \{7, 9, 11\}$, ...

a) Scrieți A_4 , A_5 .

b) Calculați suma elementelor mulțimii A_{20} .

(Concursul "Gheorghe Țițeica", Craiova, 27-28 mai 2011, echipe de elevi)

1.57 Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x \leq 2^m\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} \mid 2^m \leq x \leq 2^{2008}\}$, unde $m \in \mathbf{N}$.

a) Pentru $m = 101$, cercetați dacă suma elementelor mulțimii A este pătrat perfect.

b) Determinați numărul m astfel încât mulțimile A și B au același număr de elemente.

(Concursul "Dan Barbilian", 2012, Molea F. Gheorghe)